

## 1 Séries de Fourier

🎯 **Objectif** : établir les relations d'orthonormalité et les formules intégrales pour les coefficients de Fourier.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

La série de Fourier réelle d'une fonction  $f(x)$  s'écrit,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

et sa série de Fourier complexe d'une fonction s'écrit,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

(a) Etablir les relations d'orthonormalité réelles,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \delta_{mn}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \delta_{mn}. \end{aligned}$$

pour  $m, n \in \mathcal{N}^*$ .

(b) En déduire les coefficients de Fourier réels,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

(c) Etablir la relation d'orthonormalité complexe,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \delta_{mn}.$$

et en déduire, les coefficients de Fourier complexes,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

## 2 Problème de Bâle

🎯 **Objectif** : déterminer les séries de Fourier réelle et complexe d'une fonction linéaire et résoudre le problème de Bâle.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔪 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

(a) Déterminer les séries de Fourier réelle et complexe de la fonction,

$$f(x) = x,$$

définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

(b) En intégrant la fonction  $g(x) = f(x)^2$  définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , en déduire alors que,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 3 Fonction en escalier

🎯 **Objectif** : déterminer les séries de Fourier réelle et complexe d'une fonction en escalier.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔪 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

(a) Déterminer les séries de Fourier réelle et complexe de la fonction,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

## 4 Produit de convolution de séries de Fourier

🎯 **Objectif** : déterminer le produit de convolution de séries de Fourier complexes.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆☆ facultatif.

On considère trois fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  dont les séries de Fourier complexes s'écrivent respectivement,

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{imx}, \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inx} \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{ikx}.$$

(a) La fonction  $h(x)$  est le produit des deux autres fonctions,

$$h(x) = f(x)g(x),$$

exprimer les coefficients de Fourier complexes  $h_k$  de la fonction  $h(x)$  en termes des coefficients de Fourier complexes  $f_m$  et  $g_n$  des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ .

(b) En déduire les séries de Fourier complexe et réelle de la fonction  $h(x) = x^2$ .

(c) En intégrant la fonction  $h(x)^2 = x^4$  définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , en déduire alors que,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## 5 Ondes stationnaires

🎯 **Objectif** : modéliser des ondes stationnaires.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

On considère des ondes stationnaires définies sur une membrane rectangulaire dont les coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  se trouvent dans le domaine  $[0, \ell_x] \times$

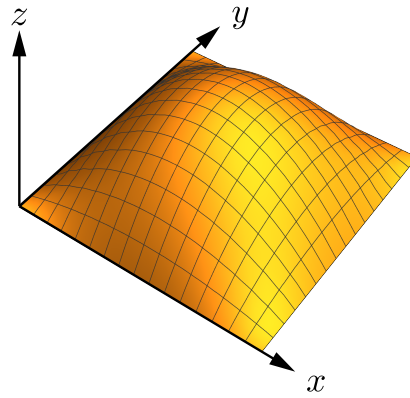


FIGURE 1 – (a) Exemple de profil initial de la membrane  $z(x, y, 0) = ax(l-x)y(l-y)$ .

$[0, \ell_y]$ . La surface de la membrane  $S \in \mathbb{R}^3$  est définie par la coordonnée verticale  $z$  qui est une fonction séparable des coordonnées  $x$  et  $y$  et du temps  $t$ ,

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)Z(t),$$

où  $X(x)$ ,  $Y(y)$  et  $Z(t)$  sont trois fonctions continues et dérivables. Les bords de la membrane sont fixes dans le plan horizontal  $z = 0$ ,

$$z(0, y, t) = z(\ell_x, y, t) = z(x, 0, t) = z(x, \ell_y, t) = 0.$$

L'évolution temporelle de la membrane satisfait l'équation d'onde,

$$\frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Les conditions initiales sur le profil symétrique de la membrane sont (Fig. 1),

$$z(x, y, 0) = ax(\ell_x - x)y(\ell_y - y) \quad \text{et} \quad \dot{z}(x, y, 0) = 0.$$

(a) Montrer que le profil de la membrane peut être écrit de la manière suivante,

$$z(x, y, t) = \sum_{n_x, n_y=1}^{\infty} b_{n_x n_y} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{\ell_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{\ell_y}\right) \cos(\omega_{n_x n_y} t).$$

(b) Déterminer les coefficients réels  $b_{n_x n_y}$  à l'aide des relations d'orthogonalité.